

PENENTUAN MODEL PERSEDIAAN SPARE PART DENGAN MEMPERTIMBANGKAN TERJADINYA *BACKORDER*

Wahid Ahmad Jauhari¹

Abstract : *In this paper we consider single inventory model for spare part management with probabilistic demand and deterministic lead time. Models are fed with parameters estimated by a procedure (Croston Method) that forecasts demand sizes and time between demand occurrences separately (intermittent demand). A solution procedure is suggested for solving the proposed model and numerical examples are used to illustrate the performance of model. A sensitivity analysis is performed to explore the effect of key parameters on lot size, safety stock, expected total inventory cost.*

Keywords : *inventory, spare part, probabilistic demand, Croston Method*

Pendahuluan

Persediaan merupakan aset penting yang dimiliki suatu perusahaan guna memenuhi permintaan pelanggannya. Salah satu alat ukur manajemen persediaan adalah total biaya persediaan dan *service level*. Pihak manajemen perlu merencanakan kebijakan persediaan yang dimilikinya guna mengoptimalkan biaya persediaan dan *service level*. Hal ini tidak akan mudah dilakukan, mengingat kedua tujuan tersebut merupakan suatu *trade off*.

Persediaan berupa *spare part* memiliki ciri yang unik dibandingkan dengan persediaan pada umumnya. Permintaan *spare part* umumnya bersifat *intermittent*. Oleh karenanya pengelolaannya perlu mempertimbangkan sifat *intermittent* tersebut. Strijbosch et al (1998) menyarankan untuk menggunakan metode peramalan Croston dalam meramalkan tingkat permintaan suatu *spare part*. Kaldschmidt et al (2003) mengemukakan pentingnya mengadopsi metode Croston dalam meramalkan permintaan yang bersifat *intermittent* dalam suatu *supply chain*. Integrasi model peramalan yang sesuai dengan sifat *intermittent* ke dalam manajemen persediaan akan memudahkan pihak manajemen dalam mengambil keputusan yang tepat.

Manajemen *spare part* umumnya mempertimbangkan adanya *backorder policy*. Dengan adanya kebijakan ini memungkinkan permintaan yang tidak dipenuhi pada periode tertentu akan dipenuhi pada periode berikutnya. Namit dan Chen (1998) mengembangkan model persediaan (Q,r) policy dengan *lead time demand* berdistribusi gamma dan mempertimbangkan terjadinya *backorder*. Beberapa peneliti juga mengembangkan model persediaan dalam *supply chain* dengan mempertimbangkan terjadinya *backorder*, diantaranya : Ben-Daya dan Hariga (2004), Chang et al (2004), Hoque dan Goyal (2005), Ouyang et al (2004), Pan et al (2002), dan Pan dan Yang (2002). Penelitian-penelitian yang telah dilakukan belum ada yang mengintegrasikan model peramalan untuk permintaan *intermittent* ke dalam model persediaan. Penelitian ini bermaksud untuk mengintegrasikan model peramalan *spare part* dengan permintaan *intermittent* ke dalam model persediaan yang membolehkan terjadinya *backorder*.

1. Peramalan dengan Metode Croston

Metode Croston pada dasarnya memisahkan permintaan suatu item yang *intermittent* menjadi 2 bagian, yaitu ukuran permintaan dan waktu antar kedatangan

¹⁾ Teknik Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya, email :
wahid_aj@yahoo.com

permintaan. Misalkan suatu proses D_z^* dapat dirumuskan dengan :

$$D_z^* = a + e_z$$

dimana

$$E(e_z) = 0, \text{Var}(e_z) = s^2$$

Jika permintaan positif pada periode t terjadi dengan probabilitas p , maka distribusi dari A_z adalah

$$P(A_z = k) = (1 - p)^{k-1} p, k \geq 1$$

dengan

$$E(A_z) = \frac{1}{p}, \text{Var}(A_z) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Nilai proses D_z^* dan A_z dalam hal ini diasumsikan independent. Dengan menggunakan prosedur *single exponential smoothing* untuk proses D_z^* dan A_z , maka akan didapatkan :

$$\hat{D}_z^* = aD_z^* + (1-a)\hat{D}_{z-1}^*$$

$$\hat{A}_z = bA_z + (1-b)\hat{A}_{z-1}$$

Parameter *smoothing* pada umumnya memenuhi $0 < a \leq 0,3$ dan $0 < b \leq 0,3$. Nilai estimasi dari standar deviasi *forecast error* dari D_z^* diperoleh dengan melakukan *smoothing* terhadap rata-rata deviasi *absolute* dari *forecast error* (dan dikalikan 1,25) :

$$MAD = w \left| D_z^* - \hat{D}_{z-1}^* \right| + (1-w)MAD_{z-1}$$

Sehingga hasil *forecast* permintaan pada suatu periode dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$\hat{D}_t(t) = \frac{\hat{D}_z^*}{\hat{A}_z}$$

2. Pengembangan Model Persediaan yang Mempertimbangkan Terjadinya Backorder

Biaya persediaan pada umumnya terdiri dari biaya pemesanan, biaya penyimpanan

dan biaya *backorder*. Adapaun notasi yang dipakai sebagai berikut :

D	= Permintaan tahunan
s	= Standar deviasi permintaan
A	= Biaya pemesanan
SS	= <i>Safety stock</i> pada
X	= Permintaan selama <i>lead time</i>
h_b	= Biaya penyimpanan
p	= Biaya <i>backorder</i>
ROP	= <i>Reorder Point</i>
q	= <i>Lot Pemesanan</i>
L	= <i>Lead Time</i>
k	= <i>Safety Factor</i>

Besarnya biaya pemesanan dalam kurun waktu tertentu merupakan perkalian antara ekspektasi frekuensi pemesanan $\left(\frac{D}{q}\right)$ dengan biaya setiap kali pemesanan (A), sehingga dapat dirumuskan :

$$TC_{B1} = \frac{D}{q} A \quad (3.1)$$

Formulasi biaya penyimpanan produk pada pembeli mengacu pada model Tersine (1994). Besarnya biaya penyimpanan produk merupakan perkalian antara rata-rata persediaan ditambah dengan *safety stock*, dengan biaya penyimpanan selama waktu tertentu (h_b). *Safety stock* dapat dirumuskan sebagai perkalian antara faktor pengaman (k) dengan standar deviasi selama periode pengiriman. Sehingga biaya penyimpanan dapat dirumuskan :

$$TC_{B2} = h_b \left(\frac{q}{2} + ks \sqrt{L} \right) \quad (3.2)$$

Penurunan rumus untuk mencari ekspektasi jumlah *backorder* mengikuti model yang sudah ada pada Tersine (1994) dan Chopra dan Meindl (2001). Besarnya biaya *backorder* dapat dicari dengan mengalikan biaya per unit *backorder* (p) dengan ekspektasi jumlah *backorder* selama kurun waktu tertentu. Misalkan variabel random kontinu X berdistribusi normal dengan rata-rata m dan standar deviasi $s > 0$ maka

probability density function dari variabel tersebut dapat dirumuskan :

$$f(x) = \frac{1}{s \sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right] \quad (3.3)$$

Jika permintaan selama periode L dirumuskan sebagai DL dengan standar deviasi $s \sqrt{L}$, *reorder point* dapat dirumuskan sebagai $ROP=DL+SS$. *Shortage* terjadi ketika permintaan selama kurun waktu L lebih besar dari persediaan ($x > ROP$) sehingga ekspektasi terjadinya *shortage* per siklus dapat dirumuskan :

$$ES = \int_{x=ROP}^{\infty} (x - ROP) f(x) dx$$

$$ES = \int_{x=DL+SS}^{\infty} (x - DL - SS) \frac{1}{\sqrt{2p} s \sqrt{L}} e^{-\frac{(x-DL)^2}{2(s \sqrt{L})^2}} dx \quad (3.4)$$

Dengan mensubstitusikan $z = \frac{(x-DL)}{s \sqrt{L}}$ dan $dx = s \sqrt{L} dz$ pada persamaan (3.4) maka :

$$ES = \int_{z=\frac{SS}{s \sqrt{L}}}^{\infty} (zs \sqrt{L} - SS) \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-z^2/2} dz$$

$$ES = -SS \int_{z=\frac{SS}{s \sqrt{L}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-z^2/2} dz + s \sqrt{L} \int_{z=\frac{SS}{s \sqrt{L}}}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-z^2/2} dz \quad (3.5)$$

Misalkan $F_s(.)$ adalah *cumulative distribution function* dan $f_s(.)$ adalah *probability density function* untuk distribusi normal standard dengan rata-rata 0 dan standar deviasi 1. Dengan menggunakan persamaan (3.3) dan definisi dari distribusi normal standard maka akan diperoleh :

$$1 - F_s(y) = \int_{z=y}^{\infty} f_s(z) dz$$

$$= \int_{z=y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-z^2/2} dz \quad (3.6)$$

Dengan mensubstitusikan $w = z^2/2$ pada persamaan (3.5) maka akan diperoleh :

$$ES = -SS \left[-F_s\left(\frac{SS}{s \sqrt{L}}\right) \right] + s \sqrt{L} \int_{w=\frac{SS^2}{2(s \sqrt{L})^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-w} dw$$

$$ES = -SS \left[-F_s\left(\frac{SS}{s \sqrt{L}}\right) \right] + s \sqrt{L} f_s\left(\frac{SS}{s \sqrt{L}}\right)$$

$$ES = s \sqrt{L} \{ f_s(k) - k [1 - F_s(k)] \}$$

$$ES = s \sqrt{L} y(k) \quad (3.7)$$

Sehingga biaya *backorder* selama kurun waktu tertentu dapat dirumuskan :

$$TC_{B3} = \left(\frac{D}{q} \right) p s \sqrt{L} y(k) \quad (3.8)$$

Sehingga total biaya persediaan dapat dirumuskan sebagai :

$$TC_{Total} = \text{Biaya pemesanan} + \text{Biaya penyimpanan} + \text{Biaya backorder}$$

$$TC_{Total} = TC_{B1} + TC_{B2} + TC_{B3}$$

$$TC_{Total}(q, k) = \frac{D}{q} A + h_b \left(\frac{q}{2} + k s \sqrt{L} \right) + \left(\frac{D}{q} \right) p s \sqrt{L} y(k) \quad (3.9)$$

3. Pencarian Solusi Model

3.1 Variabel Keputusan q

Variabel keputusan q dapat dicari dengan melakukan turunan parsial pertama persamaan (3.9) terhadap q sama dengan nol. Sehingga nilai q optimal akan diperoleh seperti persamaan (3.15).

$$\frac{\partial TC_{Total}(q, k)}{\partial q} = 0$$

$$\frac{-D}{q^2}A + \frac{h_b}{2} - \frac{D}{q^2}ps\sqrt{Ly}(k) = 0$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2D(A + ps\sqrt{Ly}(k))}{h_b}} \quad (3.10)$$

3.2 Variabel Keputusan k

Variabel keputusan k dapat dicari dengan melakukan turunan parsial pertama persamaan (3.9) terhadap k sama dengan nol. Dari Silver dan Peterson (1985) didapatkan bahwa $\frac{\partial(f_s(k) - k[1 - F_s(k)])}{\partial k} = F_s(k) - 1$, sehingga nilai k optimal akan diperoleh seperti persamaan (3.11).

$$\frac{\partial TC_{Total}(q,k)}{\partial k} = 0$$

$$s\sqrt{L}h_b + \frac{pDs\sqrt{L}(F_s(k) - 1)}{q} = 0$$

$$F_s(k) = 1 - \frac{h_b q}{pD} \quad (3.11)$$

3.3 Algoritma Penyelesaian Model

Pencarian solusi terhadap nilai q^* dan k^* yang dapat meminimumkan total biaya persediaan dapat dilakukan dengan menggunakan suatu algoritma. Algoritma yang dibuat mengacu pada ide dasar algoritma yang telah dikembangkan oleh Ben-Daya dan Hariga (2004). Kemudian dengan mencari nilai

Tabel 1. Peramalan Permintaan Tiap Spare Part

Nama Spare Part	Forecast Interarrival Time	Forecast Demand Size	Forecast Demand	Demand Tahunan	Standar Deviasi Tahunan
Radiator	4,19048	1,674	0,3996	143,848	16,611
Converter Assy	11	1,933	0,1758	63,273	7,838
Cartridge	13,23077	1,214	0,0918	33,040	6,560
Uring	3,60417	3,347	0,9286	334,307	39,723
Belt	3,67391	3,681	1,0019	360,680	43,727

Tabel 2 Komponen Biaya Persediaan Tiap Spare Part

Nama Spare Part	Holding Cost (Rp/tahun)	Backordering Cost (Rp/item)	Ordering Cost (Rp/order)	Lead Time (tahun)
Radiator	1195387	1972312	44000	0,0833
Converter Assy	3129150	5195250	44000	0,0833
Cartridge	623175	1018625	44000	0,0833
Uring	61896	83160	44000	0,0833
Belt	18088	30147	44000	0,0833

Tabel 3. Hasil Perhitungan Algoritma

Spare Part	Safety Faktor (k)	Lot Pemesanan (Q)	Reorder Point (ROP)	Total Biaya Persediaan
Radiator	1,9913	5,5102	21,5293	17999000
Converter Assy	1,9937	2,4254	9,7808	21703000
Cartridge	1,5742	3,1168	5,7327	3799800
Uring	1,5482	27,3022	45,5975	2788600
Belt	1,4061	47,9967	47,7902	1189100

konvergen (q, k) sesuai dengan cara yang telah dikembangkan oleh Ouyang et al. (2004) maka dapat dibuat algoritma baru untuk menyelesaikan model penelitian ini sebagai berikut :

Langkah 1 : Mulai dengan $q = \sqrt{\frac{2D}{h_b}}$

Langkah 2 : Gunakan nilai q untuk mendapatkan nilai k dengan persamaan (3.11)

Langkah 3 : Hitung q dengan persamaan (3.10)

Langkah 4 : Ulangi langkah 2 sampai 3 hingga nilai q dan k tidak berubah.

Langkah 5 : Tetapkan bahwa $q^* = q$ dan $k^* = k$ dan hitung $TC(q^*, k^*)$ dengan persamaan (3.9)

5. Contoh Numerik dan Pembahasan

Contoh numerik yang digunakan dalam penelitian ini mengacu pada Wakhid (2006) dengan mengambil 5 *spare part* pada kelas A. Data peramalan permintaan dengan metode Croston untuk tiap *spare part* dapat dilihat pada tabel 1. Sedangkan data komponen biaya persediaan dapat dilihat pada tabel 2.

Hasil perhitungan algoritma penyelesaian model dengan bantuan MATLAB dapat dilihat pada tabel 3. Terlihat bahwa nilai faktor k

(*safety factor*) relatif tinggi. Hal ini menunjukkan model persediaan berusaha untuk meminimasi jumlah *backorder* yang terjadi. Selain itu dapat dilihat bahwa nilai *ROP* yang didapat umumnya lebih tinggi dari nilai *lot* pemesanan Hal ini juga menunjukkan model menyiapkan *safety stock* yang relatif besar sehingga diharapkan dapat meminimasi *backorder* yang terjadi

Hasil uji sensitivitas, seperti pada tabel 4, dapat dijelaskan bahwa peningkatan biaya penyimpanan akan meningkatkan biaya persediaan. Model cenderung akan merespon kenaikan biaya ini dengan menurunkan tingkat persediaannya ($q/2+SS$). Akibatnya nilai *lot* pemesanan akan turun dan *safety stock* juga akan turun. Penurunan *safety stock* terjadi dari penurunan nilai k . Pada peningkatan biaya *backorder*, model akan menghasilkan biaya persediaan yang relatif besar. Peningkatan biaya ini akan direspon model dengan meningkatkan *safety stock* guna meminimasi jumlah *backorder* yang terjadi. Sementara itu peningkatan biaya pemesanan akan mengakibatkan kenaikan pada biaya persediaan. Model cenderung merespon kenaikan biaya pemesanan ini dengan menurunkan frekuensi pemesanan. Penurunan frekuensi pemesanan dapat dilakukan dengan meningkatkan jumlah *lot* pemesanan. Peningkatan *lead time* akan menghasilkan kenaikan biaya persediaan. Kenaikan biaya ini terjadi karena model cenderung akan meningkatkan nilai *ROP*nya guna

Tabel 4. Hasil Uji Sensitivitas Pada *Spare Part Belt*

Parameter		Safety Factor (k)	Lot Pemesanan (Q)	Reorder Point (ROP)	Total Biaya Persediaan
Holding cost	18088	1,4061	47,9967	47,7902	1189100
	10000	1,5804	61,9834	49,9899	819290
	5000	1,7618	84,9113	52,2792	536000
Backordering cost	30147	1,4061	47,9967	47,7902	1189100
	20000	1,166	48,5799	44,76	1144900
	10000	0,6705	50,1047	38,5066	1059400
Ordering cost	44000	1,4061	47,9967	47,7902	1189100
	20000	1,5823	34,1345	50,0139	978650
	10000	1,7182	25,7712	51,729	858400
Lead Time	0,0833	1,4061	47,9967	47,7902	1189100
	0,25	1,3501	53,1913	119,6879	1496100
	0,4166	1,3101	57,157	187,2753	1702700

mengantisipasi peningkatan jumlah permintaan selama periode *lead time* yang lebih lama.

5. Kesimpulan dan Saran

Dari model persediaan yang dikembangkan dapat diketahui beberapa perilaku model :

1. Peningkatan biaya persediaan akan direspon model dengan menurunkan tingkat persediaan ($q/2+SS$). Penurunan tingkat persediaan dilakukan dengan menurunkan *lot* pemesanan dan *safety stock*
2. Peningkatan biaya pemesanan akan direspon model dengan menurunkan frekuensi pemesanan. Penurunan frekuensi pemesanan dilakukan dengan meningkatkan *lot* pemesanan
3. Peningkatan biaya *backorder* akan direspon model dengan meningkatkan *safety stock* guna meminimasi terjadinya *backorder*.

Beberapa saran yang dapat diberikan guna pengembangan penelitian adalah :

1. Model penelitian yang sudah dibuat perlu dikembangkan dengan mengasumsikan *lead time* variabel
2. Model yang telah dibuat dapat dikembangkan untuk kasus : multi pembeli, multi pemasok, dan multi pembeli-multi pemasok.
3. Model selanjutnya dapat dikembangkan untuk persoalan multi produk.

REFERENSI

- Ben-Daya, M. dan Hariga, M., (2004), Integrated single vendor single buyer model with stochastic demand and variable lead time, *International Journal of Production Economics* 92,75-80
- Chang, H.C., Ouyang, L.Y., Wu, K.S., dan Ho, C.H. (2004) "Integrated vendor-buyer cooperative inventory models with controllable lead time and ordering cost reduction" *European Journal of Operational Research* 63: 1685-1699
- Chopra, S. dan Meindl, P. (2001) "*Supply Chain Management : Strategy, Planning and Operation*" Prentice Hall Ed. 1
- Hoque, M.A., dan Goyal, S.K. (2005), "A heuristic solution procedure for an integrated inventory sistem under controllable lead-time with equal or unequal sized *batch* shipments between a vendor and a buyer," *European Journal of Operational Research* xx
- Kaldschmidt, M., Zotteri, G., dan Verganti, R., (2003), Inventory management in a multi-echelon spare parts supply chain, *International Journal of Production Economics*, 81: 397-413.
- Namit, K., dan Chen, J., (1998), Solution to The (Q,r) Inventory Model for Gamma Lead Time demand, *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, Vol. 29 No. 2 pp. 138-151
- Ouyang, L.Y., Wu, K.S., dan Ho, C.H.,(2004), Integrated vendor-buyer cooperative models with stochastic demand in controllable lead time", *International Journal of Production Economics* 92,255-266
- Pan, J.C.H, Hsiao, Y.C., dan Lee, C.J. (2002) "Inventory models with fixed and variable lead time crash cost considerations" *Journal of the Operational Research Society* 53: 1048-1053
- Pan, J.C.H., dan Yang, J.S. (2002) "A study of an integrated inventory with controllable lead time" *International Journal of Production Research* 40:1263-1273
- Silver, E.A. dan Peterson, R., (1985), *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, John Wiley & Sons, Ed 2.
- Strijbosch, L. W. G., Heuts, dan Van Der Scoot, E. H. M., (1998), Improved Spare Parts Inventory Management : Case Study, Tilburg University, Netherlands
- Tersine, R.J.,(1994), *Principles of inventory and material management*, Prentice Hall Int. Ed.84,
- Wakhid Ahmad, Jauhari, (2006), Tingkat Persediaan Spare Part Forklift Merek Komatsu Dengan Pendekatan Model Persediaan Single Item, *Jurnal Ilmiah Teknik Industri* Vol 4 No 3 Hal : 99-107