

ANALISIS ELEMEN CANGKANG AKSISIMETRI SAXI_K BERKETEBALAN KONSTAN TERHADAP PROBLEM STATIS DAN GETARAN BEBAS

Bing Santosa

ABSTRAKSI

Perancangan struktur berbentuk cangkang, misalnya terowongan, pipa, kubah masjid, silo, dan reaktor nuklir banyak dijumpai kesulitan dalam penggunaan teori eksak, karena kompleksnya bentuk struktur dan tipe pembebanannya. Solusi pendekatan teoritis klasik tidak lagi dapat memberikan jawaban yang memuaskan, maka diperlukan suatu metode yang mampu menganalisis struktur tersebut dan menghasilkan solusi yang sama atau mendekati dengan kenyataan. Salah satu yang handal dan dapat dipertanggungjawabkan untuk menyelesaikan masalah di atas yaitu Metode Elemen Hingga.

Struktur cangkang yang dievaluasi adalah cangkang putar atau aksisimetri yang didasarkan pada hipotesa Love-Kirchhoff jika deformasi Geser Transversal (GT) diabaikan. Cangkang aksisimetri ini diformulasikan menggunakan elemen SAXI_K dengan tebal konstan. Elemen SAXI_K adalah suatu elemen tronkonik yang mempunyai dua titik nodal dengan tiga derajat kebebasan pada tiap nodal dan dikembangkan berdasarkan pada sifat-sifat aksisimetri yang dikemukakan pada hipotesa Love-Kirchhoff. Elemen-elemen ini diprogram dengan bahasa FORTRAN dan digabungkan dengan program utama dari PC-FEAP. Evaluasi yang dilakukan yaitu pengujian kehandalan elemen SAXI_K terhadap problem statis dan getaran bebas serta membandingkan hasil-hasil numerik dengan program SAP90, GTSTRUDL, dan solusi eksaknya. Elemen SAXI_K yang didasarkan pada teori Love/Kirchhoff baik digunakan untuk kasus cangkang yang tipis dan mempunyai kecepatan konvergensi yang cukup tinggi, serta memberikan hasil yang sangat baik.

Hasil uji numerik yang telah dilakukan terhadap beban statis pada pelat melingkar dengan beban merata dan getaran bebas pelat melingkar berlubang, yaitu mendekati hasil solusi eksaknya. Hasil perhitungan pada kasus kerucut terpancung dengan beban merata mendekati hasil dari program SAP90, serta pada kasus getaran bebas kerucut terpancung mendekati hasil dari program GTSTRUDL.

Kata kunci : Cangkang Aksisimetrik SAXI_K, Tebal Konstan, Problem Statis, Getaran Bebas

1. PENDAHULUAN

Dewasa ini teknologi konstruksi semakin hari semakin berkembang, baik bahan bangunan yang dipergunakan maupun model strukturnya. Beberapa contoh dapat dilihat pada struktur yang berbentuk cangkang, misalnya terowongan, pipa, kubah masjid, silo, dan reaktor nuklir. Dalam perancangan struktur tersebut banyak dijumpai kesulitan dalam penggunaan teori eksak, karena kompleksnya bentuk struktur dan tipe pembebanannya. Karena kompleksitas pekerjaan perancangan struktur-struktur tersebut dan solusi pendekatan teoritis klasik tidak lagi dapat memberikan jawaban yang memuaskan, maka diperlukan suatu metode

yang mampu menganalisis struktur tersebut dan menghasilkan solusi yang sama atau mendekati dengan kenyataan. Diantara metode numerik yang ada, salah satu yang handal dan dapat dipertanggungjawabkan untuk menyelesaikan masalah di atas yaitu Metode Elemen Hingga.

Metode Elemen Hingga adalah suatu teknik khusus pendekatan fungsi solusi dengan mendiskritisasi struktur menjadi elemen-elemen. Gabungan dari elemen-elemen tersebut diharapkan tetap memiliki sifat-sifat struktur yang sebenarnya, seperti bentuk geometri, energi, kekakuan, dan medan lendutan. Hasil analisis yang diperoleh tidak akan banyak berbeda dengan metode eksak, walaupun metode ini merupakan suatu metode pendekatan. Dalam penelitian ini, struktur cangkang yang dimodelisasi adalah struktur cangkang putar atau aksisimetri menggunakan elemen SAXI_K yang mempunyai dua titik nodal dengan tiga derajat kebebasan tiap nodal dan dikembangkan berdasarkan pada sifat-sifat aksisimetri yang dikemukakan pada hipotesa Kirchhoff-Love dengan tidak memperhitungkan efek geser transversal (GT), serta hanya dapat memperhitungkan ketebalan konstan.

1.1. Permasalahan

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, maka perlu dilakukan penelitian untuk mengetahui kemampuan dari elemen SAXI_K terhadap problem statis dan getaran bebas.

1.2. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk memodelisasi struktur cangkang putar atau aksisimetri menggunakan elemen SAXI_K dan memformulasikan elemen tersebut dengan Metode Elemen Hingga, serta mengevaluasi performa dari elemen SAXI_K dengan melakukan pengujian terhadap problem statis dan getaran bebas, serta membandingkan hasil-hasil numerik dengan program SAP90, GTSTRUDL, dan solusi eksak.

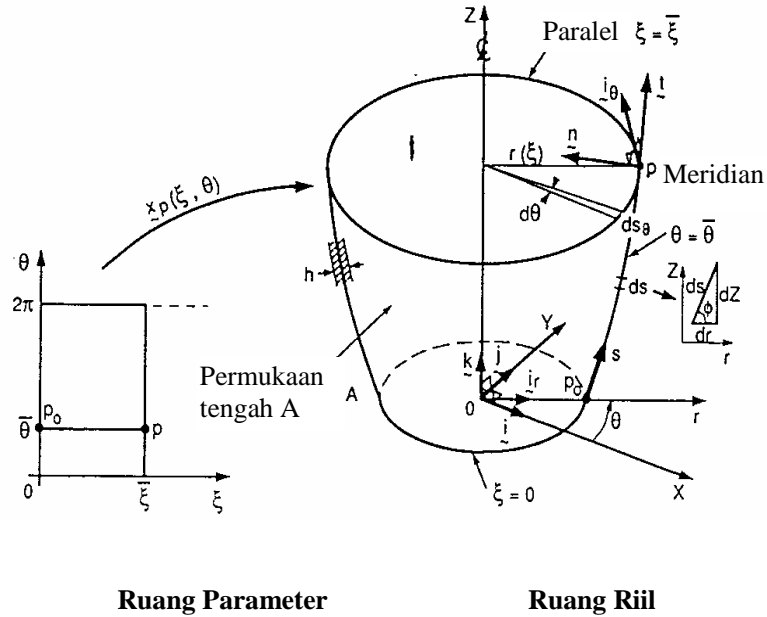
1.3. Batasan Masalah

Masalah yang dibahas dibatasi pada formulasi dan evaluasi kinerja elemen SAXI_K berketebalan konstan, material homogen (terbuat dari material yang sama), isotropik (karakteristik dari material yang tidak tergantung sistem koordinat atau nilainya tetap ke segala arah), serta linier elastis dengan tipe pembebanan statis dan getaran bebas.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Suatu cangkang putar secara geometri didefinisikan oleh permukaan tengah A dan tebal $h = 2t$. Permukaan tengah diperoleh dengan putaran suatu garis lengkung atau meridian mengelilingi sumbu putar Z . Tebal h dianggap kecil terhadap dimensi lainnya daripada cangkang dan didefinisikan dalam arah normal pada permukaan tengah (Gambar 1). Teori cangkang yang dinamakan Kirchhoff berbasiskan pada hipotesa konservasi normal : "Titik-titik material yang terdapat pada normal n pada permukaan tengah A sebelum deformasi, tetap berada pada normal n pada permukaan tengah struktur terdeformasi". Dianggap juga bahwa deformasi geser transversal diabaikan (Batoz, J. L., Dhatt, G., 1990). Penelitian tentang elemen SAXI_K dengan beban statis telah diteliti oleh Johnhan (1996) dan menyimpulkan bahwa Elemen SAXI_K yang didasarkan dengan teori Love/Kirchhoff baik digunakan untuk kasus cangkang yang tipis, elemen tersebut mampu merepresentasikan tiga gerakan benda kaku secara eksak dengan memberikan nilai deformasi dan energi internal nol pada uji gerakan benda kaku, elemen mempunyai kecepatan konvergensi yang cukup tinggi.

Konvergensi dan akurasi elemen secara keseluruhan memberikan hasil yang sangat baik, yaitu mendekati solusi eksak dan hasil perhitungan program SAP90 sebagai salah satu pembanding, dan tidak ada *Shear Locking* dan *Membrane Locking* untuk kasus cangkang tipis. Elemen SAXI_L pada kasus cangkang tebal yang memperhitungkan efek geser transversal (GT) berdasarkan teori Mindlin (Bing Santosa, Jurnal Media Komunikasi, 2003) dan memberikan hasil yang sangat baik, yaitu mendekati solusi eksak, serta mendekati hasil perhitungan program SAP90 dan GTSTRUDL sebagai pembanding yang diuji terhadap beban statis dan getaran bebas.



Gambar 1. Deskripsi Geometrik Permukaan Tengah

3. LANDASAN TEORI

3.1. Umum

Elemen Tronkonik SAXI_K adalah suatu elemen tronkonik berbasis pada teori Kirchhoff dimana komponen kurvilin $u(s)$ dan $w(s)$ didefinisikan oleh aproksimasi linier dan kubik secara berturutan.

3.2. Aproksimasi Peralihan dan Deformasi

Elemen diformulasikan dengan menggunakan komponen kurvilin u dan w dari \tilde{u}_p :

$$\tilde{u}_p = u(s) \mathbf{t} + w(s) \tilde{\mathbf{n}} \quad (1)$$

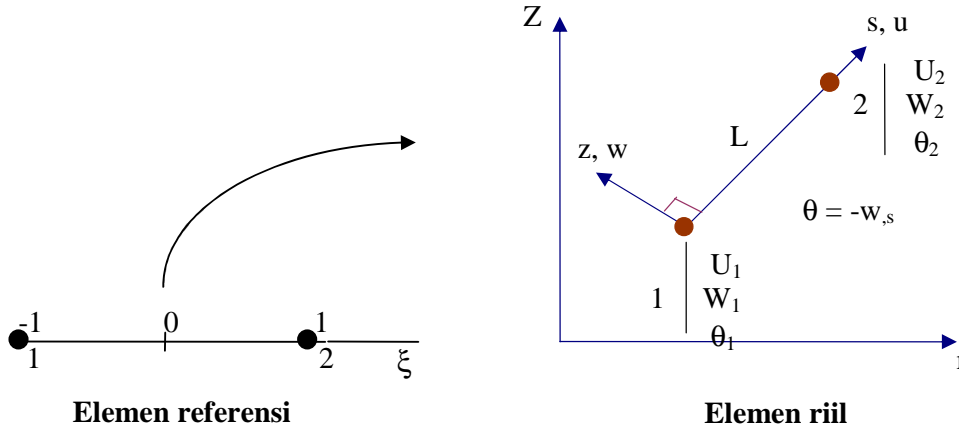
$u(s)$ adalah linier (2 variabel) dan $w(s)$ adalah kubik dalam s , tipe Hermite (4 variabel) diperlihatkan pada Gambar 2.

Aproksimasi $u(\xi)$ dengan $-1 \leq \xi \leq 1$:

$$u(\xi) = N_1^L u_1 + N_2^L u_2 ; N_1^L = \frac{1-\xi}{2} ; N_2^L = \frac{1+\xi}{2}$$

dengan
$$u_{,\xi} = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) ; u_{,s} = u_{,\xi} \xi_{,s} = \frac{2}{L} u_{,\xi} \quad (2)$$

Aproksimasi $w(\xi)$: $w = \langle N \rangle \{w_n\} ; \langle w_n \rangle = \langle w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \rangle \quad (3)$



Gambar 2. Elemen Tronkonik SAXI_K.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) ; N_2 = -\frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) ; N_4 = -\frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi) \quad (4)$$

$$N_{1,s} = \frac{3}{2L}(-1+\xi^2) ; N_{2,s} = -\frac{1}{4}(-1-2\xi+3\xi^2)$$

$$N_{3,s} = \frac{3}{2L}(1-\xi^2) ; N_{4,s} = -\frac{1}{4}(-1+2\xi+3\xi^2)$$

$$N_{1,ss} = \frac{6}{L^2}\xi ; N_{2,ss} = -\frac{1}{L}(-1+3\xi)$$

$$N_{3,ss} = -\frac{6}{L^2}\xi ; N_{4,ss} = -\frac{1}{L}(1+3\xi)$$

Deformasi membran didefinisikan :

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_s \\ e_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,s} \\ \frac{1}{r}(u C - w S) \end{Bmatrix} = [B_m] \{u_n\}_{loc} \quad (5)$$

dengan
$$\langle u_n \rangle_{loc} = \langle u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \rangle \quad (6)$$

sedangkan kelengkungan Kirchhoff ($1/R_s = 0$) :

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -w_{,ss} \\ -\frac{c}{r} w_{,s} \end{Bmatrix} = [B_b] \{u_n\}_{loc} \quad (7)$$

3.3. Matriks Kekakuan

Persamaan (5) sampai dengan (7) dipakai untuk mendefinisikan matriks kekakuan suatu elemen :

$$\begin{aligned} W_{int}^e &= 2 \pi \int_0^L (\langle e^* \rangle ([H_m] \{e\} + [H_{mb}] \{\chi\}) + \langle \chi^* \rangle ([H_{mb}] \{e\} + [H_b] \{\chi\})) r \, ds \\ &= \langle u_n^* \rangle_{loc} [k]_{loc} \{u_n\}_{loc} \end{aligned} \quad (8)$$

$\langle u_n^* \rangle_{loc}$ didefinisikan seperti pada persamaan (6) :

$$[k]_{loc} = 2 \pi \int_0^L [k_\xi] \, ds = 2 \pi \int_{-1}^1 [k_\xi] \frac{L}{2} d\xi \quad (9)$$

dengan

$$[k_\xi] = ([B_m]^T ([H_m] [B_m] + [H_{mb}] [B_b]) + [B_b]^T ([H_{mb}] [B_m] + [H_b] [B_b])) r$$

Matriks $[B_m]$ dan $[B_b]$ diberikan oleh persamaan (5) dan (7). Matriks $[H_m]$, $[H_{mb}]$, dan $[H_b]$ didefinisikan :

$$[H_m] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}; [H_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}; [H_{mb}] = -\frac{Eh^3 S}{12(1-\nu^2)r_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Skema integrasi numerik tipe Gauss dengan dua titik memungkinkan untuk mempertahankan rang sama dengan 5 :

$$[k]_{loc} = 2 \pi \sum_{i=1}^2 [k_\xi(\xi = \xi_i)] \omega_i \frac{L}{2} \quad (11)$$

dengan $\xi_i = \mp 1/\sqrt{3}$ dan $\omega_i = 1$

Setelah evaluasi $[k]_{loc}$, perlu untuk mentransformasi variabel $\{u_n\}_{loc}$ yang didefinisikan dalam koordinat lokal elemen dalam fungsi variabel nodal koordinat silinderik, sebelum melakukan penggabungan. Matriks transformasi $[T]$:

$$\{u_n\}_{loc} = [T] \{u_n\} \quad ; \quad [T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[t] = \begin{bmatrix} [Q]^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [Q] = \begin{bmatrix} \tilde{t} & \tilde{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$$

dengan

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [k] \{u_n\} \quad (13)$$

$$\langle u_n \rangle = \langle U_1 \quad W_1 \quad \theta_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad \theta_2 \rangle$$

dan

$$[k] = [T]^T [k]_{loc} [T]$$

3.4. Matriks Massa

Matriks massa koheren dari elemen diperoleh dengan menggunakan persamaan :

$$\begin{aligned}
W_m^e &= 2\pi \int_0^L (u^* \rho_m \ddot{u} + w^* \rho_m \ddot{w} + \theta^* \rho_b \ddot{\theta} + u^* \rho_{mb} \ddot{\theta} + \theta^* \rho_{mb} \ddot{u}) r ds \\
&= \langle u_n^* \rangle_{loc} [m]_{loc} \{ \ddot{u}_n \}_{loc}
\end{aligned} \tag{14}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\theta^* &= -w_{,s}^* ; \ddot{\theta} = -\ddot{w}_{,s} \\
\langle \ddot{u}_n \rangle_{loc} &= \langle \ddot{u}_1 \quad \ddot{w}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad \ddot{w}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \rangle \\
[m]_{loc} &= 2\pi \int_0^L [m_\xi] ds = 2\pi \int_{-1}^1 [m_\xi] \frac{L}{2} d\xi \\
[m_\xi] &= \left(\{N^L\} \rho_m \langle N^L \rangle + \{N^C\} \rho_m \langle N^C \rangle \right. \\
&\quad \left. + \{N_{,s}^C\} \rho_b \langle N_{,s}^C \rangle - \{N^L\} \rho_{mb} \langle N_{,s}^C \rangle - \{N_{,s}^C\} \rho_{mb} \langle N^L \rangle \right) r
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\langle N^L \rangle &= \langle N_1^L \quad 0 \quad 0 \quad N_2^L \quad 0 \quad 0 \rangle \\
\langle N^C \rangle &= \langle 0 \quad N_1 \quad N_2 \quad 0 \quad N_3 \quad N_4 \rangle \\
\langle N_{,s}^C \rangle &= \langle 0 \quad N_{1,s} \quad N_{2,s} \quad 0 \quad N_{3,s} \quad N_{4,s} \rangle
\end{aligned} \tag{15}$$

Matriks massa diagonalnya adalah :

$$\langle m \rangle = 2\pi \rho h \langle a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \rangle \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\text{dengan :} \quad a &= \frac{L}{6} (2r_1 + r_2) ; \quad b = \frac{L}{20} (7r_1 + 3r_2) ; \quad c = -\frac{L^2}{60} (3r_1 + 2r_2) \\
d &= \frac{L}{6} (r_1 + 2r_2) ; \quad e = \frac{L}{20} (3r_1 + 7r_2) ; \quad f = \frac{L^2}{60} (2r_1 + 3r_2)
\end{aligned}$$

3.5. Beban Ekuivalen

Untuk beberapa tipe pembebanan volumik dan permukaan, vektor beban ekuivalen didefinisikan oleh:

$$W_f^e = 2\pi \int_0^L (u_p^* \cdot \tilde{f} + \beta^* m_s) r ds \tag{17}$$

dengan

$$\begin{aligned}
u_p^* \cdot \tilde{f} &= U^* f_r + W^* f_z = u^* f_s + w^* f_z \\
W_f^e &= 2\pi \int_0^L (u_p^* \cdot \tilde{f} + \beta^* m_s) r ds = 2\pi \int_0^L (u^* f_s + w^* f_z - w_{,s}^* m_s) r ds
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{dengan} \quad \begin{Bmatrix} f_s \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix}$$

Vektor beban ekuivalen elemen SAXI_K adalah :

$$W_f^e = \langle u_n^* \rangle \{ f_n \} \quad \text{dengan} \quad \{ f_n \} = 2\pi \int_{-1}^1 \{ f_\xi \} r \frac{L}{2} d\xi \tag{19}$$

$$\text{dan} \quad \{ f_\xi \} = \{ N^L \} f_s + \{ N^C \} f_z - \{ N_{,s}^C \} m_s$$

Matriks $\{N^L\}$, $\{N^C\}$, dan $\{N_{,s}^C\}$ didefinisikan oleh persamaan (15).

Dua tipe pembebanan volumik f_v yaitu :

a). beban akibat gaya gravitasi dengan $f_v = -\rho g k$, untuk ρg konstan didapat :

$$f_r = 0, f_z = -\rho g h \text{ dan } m_s = \rho g \frac{S^2 h^3}{r 12} \quad (20)$$

b). beban akibat gaya sentrifugal akibat rotasi uniform Ω (dalam rad/det) mengelilingi Z :

$$f_r = \rho \Omega^2 r h ; f_z = 0 \text{ dan } m_s = -\rho \Omega^2 C S \frac{h^3}{6} \quad (21)$$

c). beban akibat tekanan p_n bekerja pada permukaan superior didapat :

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= 2 \pi \int_0^L \left(u_p^* + \frac{h}{2} \beta^* t \right) \cdot p_n \left(r - \frac{h}{2} S \right) ds \\ &= 2 \pi \int_0^L \left(-U^* S + W^* C \right) p \left(r - \frac{h}{2} S \right) ds \end{aligned} \quad (22)$$

dengan $f_r = -S p \left(1 - \frac{h S}{2 r} \right) ; f_z = C p \left(1 - \frac{h S}{2 r} \right) ; m_s = 0$

3.6. Gaya Resultan dan Tegangan

Bilamana variabel nodal $\{u_n\}$ diketahui, deformasi membran dan kelengkungan dievaluasi pada $s = L/2$ pada persamaan (5) dan (7) :

$$\{e\} = [B_m] \{u_n\}_{\text{loc}} ; \{\chi\} = [B_b] \{u_n\}_{\text{loc}} \quad (23)$$

Gaya resultan $\{N\}$ dan $\{M\}$ juga diperoleh :

$$\begin{aligned} \{N\} &= [H_m] \{e\} + [H_{mb}] \{\chi\} + \{N_o\} \\ \{M\} &= [H_{mb}] \{e\} + [H_b] \{\chi\} + \{M_o\} \end{aligned} \quad (24)$$

Matriks $[H_m]$, $[H_{mb}]$ dan $[H_b]$ diberikan persamaan (10) dalam kasus homogen.

$\{e\}$, $\{\chi\}$, $\{N\}$ dan $\{M\}$ dievaluasi pada pertengahan ($s = L/2$) dari elemen.

Deformasi dalam arah tebal $\epsilon_s(z)$ dan $\epsilon_\theta(z)$ diberikan oleh ($\alpha_1 = 1$) :

$$\epsilon_s = e_s + z \chi_s \text{ dan } \epsilon_\theta = \frac{1}{\alpha_2} (e_\theta + z \chi_\theta) ; \alpha_2 = 1 - z \frac{S}{r} \quad (25)$$

$$\{u_n\}_{\text{loc}} = [T] \{u_n\} \quad (\text{persamaan 12})$$

Pada elemen tersebut, deformasi dan tegangan dapat dievaluasi pada beberapa titik (titik integrasi, nodal sudut).

$$\{r_n\}_{\text{loc}} = [T] ([k] \{u_n\} - \{f_n\}) \quad (26)$$

dengan

$$\langle r_n \rangle_{\text{loc}} = 2 \pi \langle -r_1 N_{s1} \quad -r_1 T_{s1} \quad -r_1 M_{s1} \quad r_2 N_{s2} \quad r_2 T_{s2} \quad r_2 M_{s2} \rangle$$

4. METODE PENELITIAN

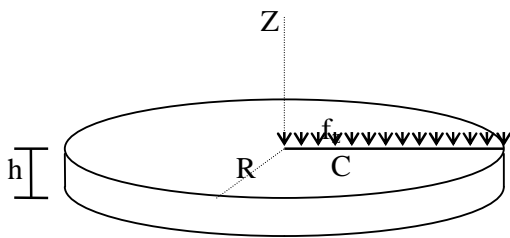
Metode penelitian ini adalah dengan studi literatur dari berbagai buku. Evaluasi numeric elemen SAXI_K dilakukan dengan membuat program komputer. Program ini

merupakan *subroutine* perhitungan matriks kekakuan elemen, gaya nodal elemen, tegangan, dan gaya-gaya dalam yang ditulis dalam bahasa *FORTRAN* menggunakan *Microsoft FORTRAN* sebagai kompilatornya. Sebagai program utama digunakan *software* PC FEAP yang listing program utamanya dapat ditemukan pada buku *The Finite Element Method* 3rd Ed. jilid 1, karangan Zienkiewicz, O. C. Kemudian dilakukan uji numerik pada kasus pelat melingkar dengan beban merata dan getaran bebas pelat melingkar berlubang dibandingkan dengan solusi eksaknya, pada kasus kerucut terpancung dengan beban merata dibandingkan dengan hasil dari program SAP90, serta getaran bebas kerucut terpancung dibandingkan dengan program GTSTRUDL.

5. UJI NUMERIK

5.1. Pelat Melingkar dengan Beban Merata

Pengujian ini menggunakan suatu elemen linier yang diputar terhadap sumbu putar Z 360° sehingga terbentuk suatu pelat lingkaran berjari-jari $R = 5$ m. Pengujian terhadap pelat lingkaran ini dilakukan dengan kondisi batas, yaitu jepit ($u = w = \beta = 0$) pada sekeliling pelat. Uji pertama yang dilakukan ialah dengan mendiskritisasi elemen linier menjadi 2, 4, 6, 8, 10 dan 12 buah elemen masing-masing dengan panjang yang sama dan dengan dua variasi rasio antara radius pelat dan tebalnya sebesar 5 dan 50. Beban yang digunakan adalah beban terbagi rata di seluruh permukaan pelat sebesar 100 kg/m^2 . Uji yang dilakukan yaitu untuk mengetahui peralihan arah w , gaya dalam M_s dan M_θ elemen SAXI_K dibandingkan dengan solusi eksak.

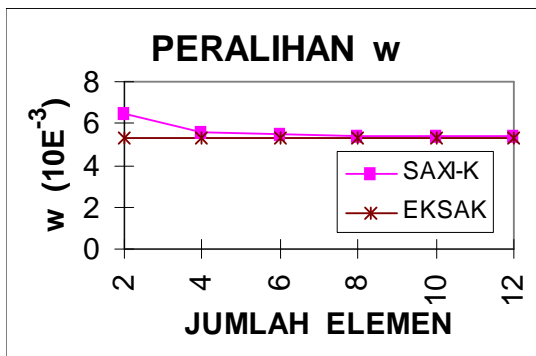


Data :

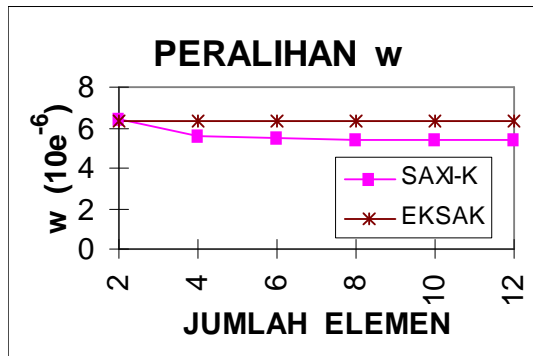
$E = 2E9 \text{ kg/m}^2$; $\nu = 0,3$
 $R = 5 \text{ m}$; $h = 0,1 \text{ m}, 1,0 \text{ m}$
 Beban merata : $f_z = 100 \text{ kg/m}^2$
 Berat sendiri diabaikan

Kondisi batas :

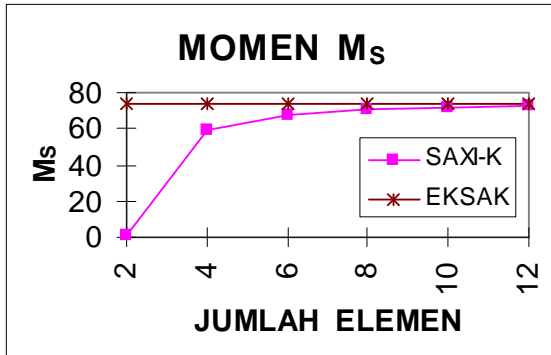
Jepit : $u = w = \beta = 0$



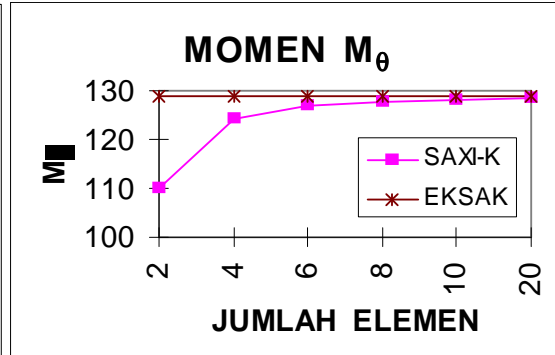
Gambar 3A. Peralihan w di Pusat Pelat ($h=0,1 \text{ m}$)



Gambar 3B. Peralihan w di Pusat Pelat ($h=1 \text{ m}$)



Gambar 4. Momen M_s pada R/2

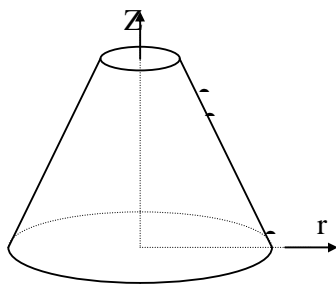


Gambar 5. Momen M_θ pada R/2

Pada Gambar 3A. terlihat bahwa cangkang SAXI_K mempunyai kecepatan konvergensi yang cukup tinggi pada kasus cangkang tipis dibandingkan solusi eksaknya, sedangkan pada kasus cangkang tebal (Gambar 3B) hasilnya menjauhi solusi eksaknya. Hasil perhitungan momen M_s dan M_θ juga mempunyai kecepatan konvergensi yang cukup tinggi pada kasus cangkang tipis dibandingkan solusi eksaknya (Gambar 4 dan Gambar 5).

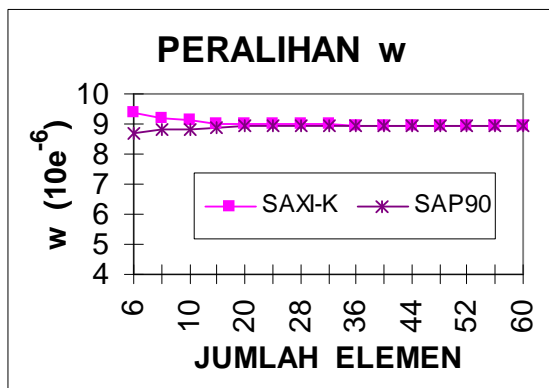
5.2. Kerucut Terpancung dengan Beban Merata

Pengujian ini menggunakan suatu elemen linier yang membentuk suatu kerucut terpancung dengan jari-jari bagian atas (R_{atas}) = 2 m dan jari-jari bagian bawah (R_{bawah}) = 10 m serta dengan perletakan jepit ($u = w = \beta = 0$) pada sekeliling dasar kerucut. Uji yang dilakukan ialah dengan mendiskritisasi elemen linier menjadi 6, 8, 10, 16, 20, 24, 28, 32, 26, 40, 44, 48, 52, 56, dan 60 buah elemen yang masing-masing panjangnya sama. Beban yang digunakan adalah beban terbagi rata diseluruh permukaan kerucut sebesar 10 satuan. Uji ini dimaksudkan untuk mengetahui harga dari peralihan arah u dan w , gaya normal N_s dan N_θ dan momen M_s dan M_θ untuk dibandingkan dengan hasil perhitungan yang dilakukan dengan program SAP90.

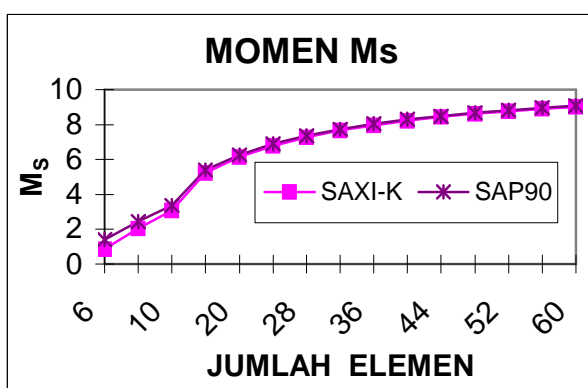


Data : $E = 6,825 \times 10^7$; $\nu = 0,3$
 $R_{atas} = 2$; $R_{bawah} = 10$; $h = 0,4$
 Beban merata : $\rho = 10$

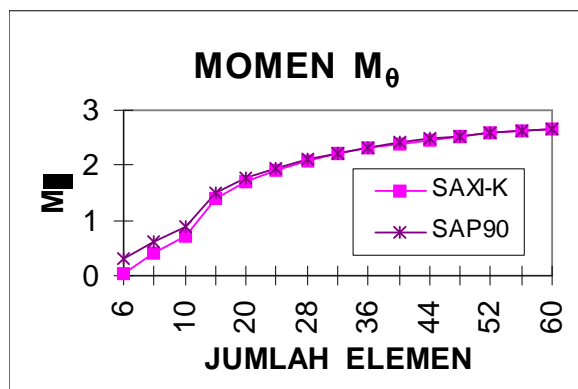
Kondisi batas
 pada alas kerucut :Jepit : $u = w = \beta = 0$



Gambar 6. Peralihan Arah w



Gambar 7. Momen M_s



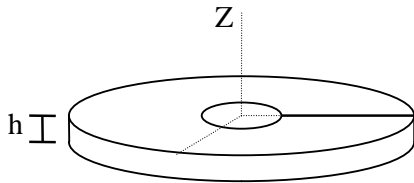
Gambar 8. Momen M_θ

Hasil uji numerik pada kasus kerucut terpancung dengan beban merata baik pada peralihan w, momen M_s , dan M_θ (Gambar 6, Gambar 7, dan Gambar 8) mendekati hasil perhitungan dari program SAP90.

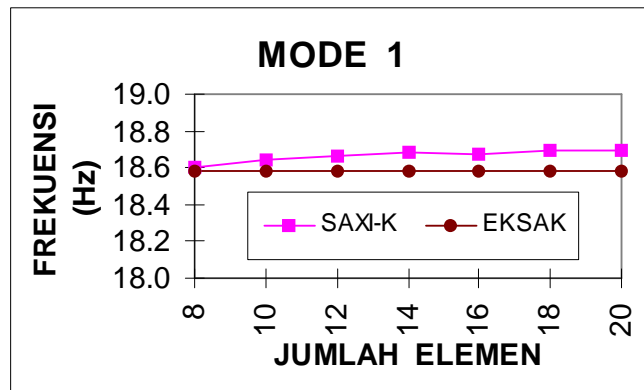
5.3. Getaran Bebas Pelat Melingkar Berlubang

Pengujian ini menggunakan suatu elemen linier yang membentuk suatu pelat melingkar berlubang dengan jari-jari luar ($R_{\text{luar}} = 6$ m, jari-jari lubang ($R_{\text{dalam}} = 1,8$ m dan

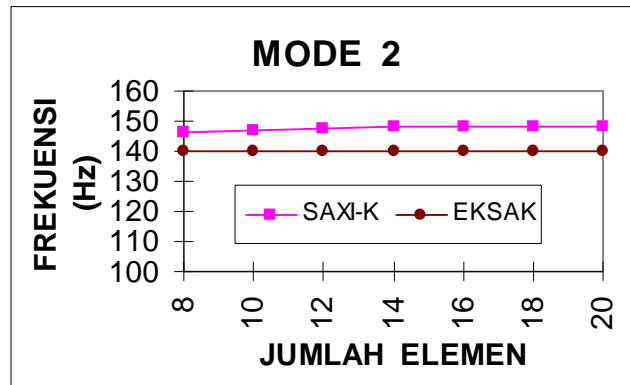
tebal $h = 0,6$ m serta dengan perletakan sederhana ($w = 0$) pada sekeliling pelat. Uji yang dilakukan ialah dengan mendiskritisasi elemen linier menjadi 2, 4, 6, 8, 10, dan 12 buah elemen yang masing-masing panjangnya sama. Beban yang digunakan adalah getaran bebas dengan $\rho = 8.000 \text{ kg/m}^3$. Uji ini dimaksudkan untuk mengetahui harga dari frekuensi alami struktur pada Mode 1, 2, dan 3.



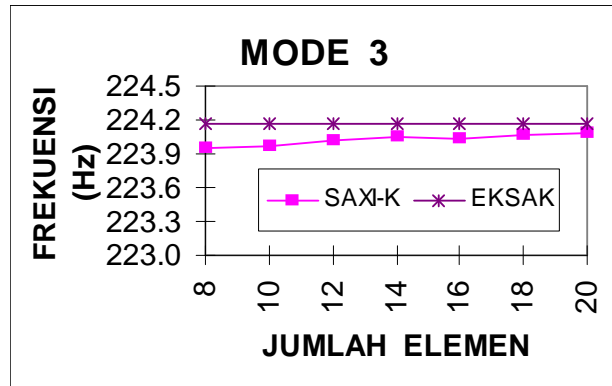
Data : $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$
 $R_{\text{luar}} = 6 \text{ m}$; $R_{\text{dalam}} = 1,8 \text{ m}$; $h = 0,6 \text{ m}$
 Massa jenis : $\rho = 8.000 \text{ kg/m}^3$
 Kondisi batas : Perletakan sederhana : $w = 0$



Gambar 9. Frekuensi Alami Pelat Melingkar Berlubang pada Mode 1



Gambar 10. Frekuensi Alami Pelat Melingkar Berlubang pada Mode 2

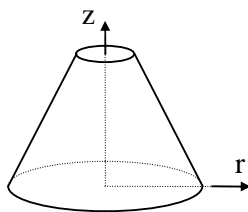


Gambar 11. Frekuensi Alami Pelat Melingkar Berlubang pada Mode 3

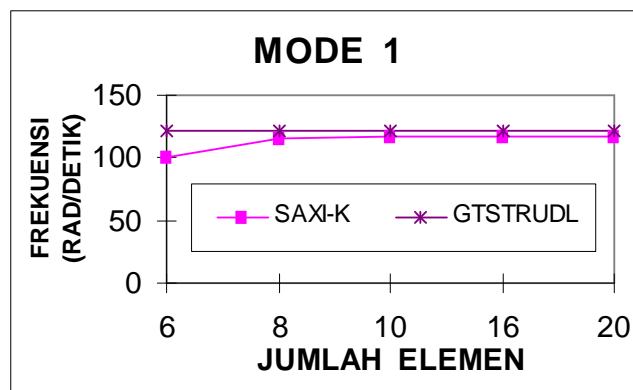
Hasil uji numerik getaran bebas pada pelat melingkar berlubang memberikan hasil yang baik pada mode 1, mode 2, maupun mode 3 dibandingkan dengan solusi eksaknya (Gambar 9, Gambar 10, dan Gambar 11).

5.4. Getaran Bebas Kerucut Terpancung

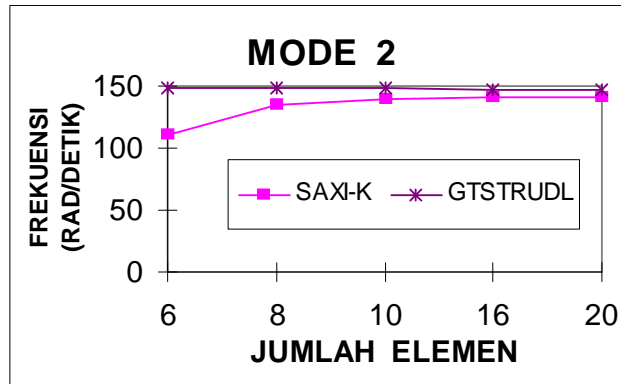
Pengujian ini menggunakan suatu elemen linier yang membentuk suatu kerucut terpancung dengan jari-jari bagian atas (R_{atas}) = 2 m dan jari-jari bagian bawah (R_{bawah}) = 10 m serta dengan perletakan jepit ($u = w = \beta = 0$) pada sekeliling dasar kerucut. Uji yang dilakukan ialah dengan mendiskritisasi elemen linier menjadi 6, 8, 10, 16, dan 20 buah elemen yang masing-masing panjangnya sama. Beban yang digunakan adalah getaran bebas dengan $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$. Uji ini dimaksudkan untuk mengetahui harga dari frekuensi alami struktur pada Mode 1, 2, dan 3.



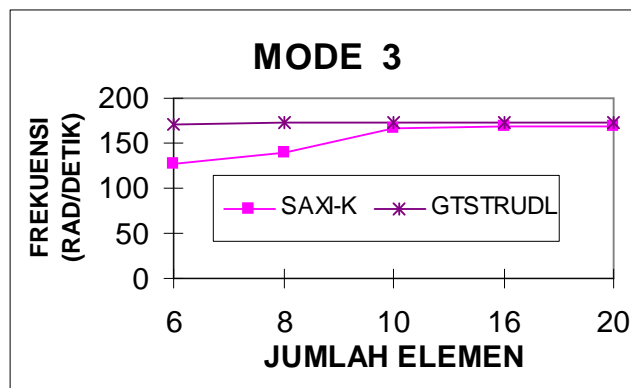
Data : $E = 6,825 \times 10^7 \text{ kg/m}^2$; $\nu = 0,3$
 $R_{atas} = 2 \text{ m}$; $R_{bawah} = 10 \text{ m}$; $h = 0,4 \text{ m}$
 Massa jenis : $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$
 Kondisi batas : Jepit : $u = w = \beta = 0$



Gambar 12. Frekuensi Alami Kerucut Terpancung pada Mode 1



Gambar 13. Frekuensi Alami Kerucut Terpancung pada Mode 2



Gambar 14. Frekuensi Alami Kerucut Terpancung pada Mode 3

Hasil uji numerik getaran bebas pada kerucut terpancung memberikan hasil yang baik pada mode 1, mode 2, maupun mode 3 dibandingkan dengan hasil dari program GTSTRUDL (Gambar 12, Gambar 13, dan Gambar 14).

6. KESIMPULAN

Dari hasil uji numerik yang telah dilakukan terhadap problem statis maupun getaran bebas, dapat ditarik kesimpulan yang berkaitan dengan karakteristik elemen Tronkonik tanpa geser transversal (GT) SAXI_K, yaitu :

1. Elemen SAXI_K yang didasarkan pada teori Love/Kirchhoff baik digunakan untuk kasus cangkang yang tipis.
2. Tidak ada *Shear Locking* dan *Membrane Locking* untuk kasus cangkang tipis.
3. Elemen SAXI_K mempunyai kecepatan konvergensi yang cukup tinggi dan memberikan hasil yang sangat baik dari hasil uji numerik yang telah dilakukan terhadap beban statis pada pelat melingkar dengan beban merata dan getaran bebas pelat melingkar berlubang, yaitu mendekati hasil solusi eksaknya, hasil perhitungan pada kasus kerucut terpancung dengan beban merata mendekati hasil program SAP90, serta pada kasus getaran bebas kerucut terpancung mendekati hasil program GTSTRUDL.

DAFTAR PUSTAKA

- Batoz, J.L., Dhatt, G., 1990, *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, Vol. 1: Solides Elastiques, 1st ed., Édition Hermès, Paris
- Batoz, J.L., Dhatt, G., 1990, *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, Vol. 2: Poutres et Plaques, 1st ed., Édition Hermès, Paris
- Batoz, J.L., Dhatt, G., 1992, *Modélisation des Structures par Éléments Finis*, Vol. 3: Coques, 1st ed., Édition Hermès, Paris
- Bing Santosa, 2003, *Analisis Elemen Cangkang Aksisimetri SAXI_L Berketebalan Konstan Terhadap Problem Statis dan Getaran Bebas*, Jurnal Media Komunikasi Universitas Diponegoro, Semarang
- Cook, R., Malkus, D.S., Plesha, M.E., 1989, *Concepts and applications of finite element element analysis*, 3rd ed., John Wiley, New York
- Johnhan, 1996, *Analisis Elemen Cangkang Aksisimetri SAXI_K Berketebalan Konstan Terhadap Problem Statis*, Tugas Akhir Universitas Tarumanegara, Jakarta
- Noor, A.K., 1990, *Bibliography of monographs and surveys on shells*, Applied Mechanics Review, Vol. 43, No. 9, p. 223-234, Prentice Hall, New York
- Zienkiewicz, O.C., R.L. Tylor, 1977, *The finite element method* Vol 1: Basic Formulation and Linear Problem, 4th ed., McGraw-Hill, London

DAFTAR NOTASI

\sim	= tanda vektor (contoh \tilde{u})
*	= tanda virtual
\int	= integral
{ }	= vektor kolom
[]	= matriks (juga digunakan untuk menyatakan referensi)
GT	= geser transversal
X, Y, Z	= koordinat kartesian global
ϵ	= tensor deformasi
σ	= tensor tegangan
β	= rotasi cangkang
h	= tebal cangkang
E	= modulus Young
G_{SZ}	= modulus geser
ν	= rasio Poisson
r_i, Z_i	= koordinat x nodal i, koordinat y nodal i
S_i, C_i	= sinus nodal i, cosinus nodal i
$[B_m], [B_b], [B_s]$	= matriks yang mendefinisikan deformasi membran, lentur dan GT
$[H_m], [H_b], [H_{mb}]$	= matriks sifat homogen membran, lentur dan kopel membran-lentur
$[H_s]$	= matriks sifat global pada GT
$[k]_{loc}, [k]_{glob}$	= matriks kekakuan elementer pada koordinat lokal dan global
$[k_m], [k_b], [k_s]$	= matriks elementer membran, lentur dan GT
$[k_{mb}]$	= kekakuan membran-lentur
$\{e\}, \{\chi\}$	= deformasi membran, kelengkungan ("Curvature")
$\{f_n\}, \{f_{nv}\}$	= vektor beban ekuivalen elementer dan global
$\{N\}, \{M\}, \{T\}$	= vektor gaya resultan membran, lentur, GT
$\{N_o\}, \{M_o\}, \{T_o\}$	= vektor gaya resultan inisial
$\{r_n\}$	= vektor reaksi nodal elementer

$\{u_n\}, \{U\}$	=	vektor dof elemen, vektor dof
$\{\epsilon_t\}, \{\epsilon_s\}$	=	komponen deformasi dalam arah basis kurvilinear
N_i	=	fungsi bentuk nodal i
$\rho_m, \rho_b, \rho_{mb}$	=	inersia homogen membran, lentur, kopel membran-lentur
$\underline{t}, \underline{n}$	=	vektor satuan arah sumbu s dan arah sumbu z lokal
$\underline{t}_i, \underline{n}_i$	=	vektor satuan nodal i arah sumbu s dan arah sumbu z lokal
U, W	=	peralihan dalam koordinat silindrik arah s dan Z
u, v, w	=	peralihan dalam koordinat kurvilinear s, θ , z (atau arah x, y, z)
$\underline{u}_p, \underline{u}_q$	=	peralihan titik p, q
f_r, f_z, f_s, f_z	=	pembebanan dalam arah paralel
$R, (R_s, R_\theta)$	=	jari-jari kelengkungan (meridian, paralel)

RIWAYAT PENULIS

Ir. Bing Santosa, MT., adalah staf pengajar Program Studi Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Janabadra Yogyakarta.